Universidad de Granada

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curvas y Superficies

Autor:
Jesús Muñoz Velasco

Curso 2025-2026

Índice general

En Grecia se estudiaban problemas como el siguiente: si tengo una rueda con un punto en el borde y giro la rueda sobre una superficie plana resultará en la curva epicicloide. Sin embargo, esta solución se describía heurísticamente. Es por esto que tal y como la vamos a estudiar, el estudio de curvas y superficies surge en el siglo XVII con los dos autores más importantes de este siglo (y litigadores) Leibniz y Newton. En el siglo XVIII podemos estudiar a Euler y Monge. En el siglo XIX tenemos a Jean Frenet, Pauino Senet y autores de la Escuela Francesa, de entre ellos el más conocido, Cauchy. Por último del siglo XX tenemos a Jean Gaston Darboux y a Élie Cartan.

1. Curvas en el plano y en el espacio

1.1. Definición. Curva Regular. Longitud de arco

Definición 1.1 (Curva)**.** Una **curva** en el espacio es una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto. Normalmente, si queremos señalar las componentes de α escribiremos

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

En realidad a un geómetra solo le interesa la llamada **traza de la curva**, definida como

$$tr(\alpha) = img(\alpha) = \alpha(I)$$

Ejemplo. Sea $a \in \mathbb{R}^3$ un punto y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector[1]. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & a + tv \end{array}$$

Si estudiamos la traza de α veremos que tenemos que hacer una distinción de casos:

- •) Si $v = 0$ tendremos que $img(\alpha) = \{a\}$ por lo que será un único punto y según nuestra definición esta será una recta.
- •) Si $v \neq 0$ tendremos ahora que $tr(\alpha)$ es la recta que pasa por a y que tiene como vector de dirección el vector v, que escribiremos como

$$R_{a,v} = a + \langle v \rangle$$

Definición 1.2 (Curva plana)**.** Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ la llamaremos **curva plana** si existe un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $tr(\alpha) \subset P$.
Como P y $P(\{z = 0\})$ son equivalentes por un movimiento rígido[2] de $\mathbb{R}^3$ podemos considerar que la curva α está definida como

$$\alpha : I \to P(\{z = 0\}) \subset \mathbb{R}^3$$

Por lo que podremos estudiar sus componentes como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), 0) \equiv (x(t), y(t))$$

De nuevo podemos abstraer y pensar que una curva plana es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

[1]Lo de llamar punto o vector solo sirve para facilitar el lenguaje y nuestro aprendizaje
[2]recordemos que es una transformación afín que conserva la métrica, o una isometría

Observación. Diremos que las curvas son **parametrizadas** si dependen de un parámetro (normalmente el tiempo[3]) y las llamaremos **diferenciables** ya que por su propia definición las componentes son diferenciables.

Ejemplo.

1. Consideramos la curva $\alpha(t) = a + tv$, con $a \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ (la estudiada anteriormente). Si estudiamos su **velocidad** tendremos que pensar en su derivada obteniendo

   $$\alpha'(t) = v$$

   lo que nos dice que la velocidad es constante (tanto celeridad como direccional). Esto nos dice que la curva α describe un MRU[4], lo que nos recuerda a la Primera Ley de Newton[5]. Si ahora estudiamos la **aceleración** tenemos

   $$\alpha''(t) = 0$$

   Lo que nos confirma que estamos ante un MRU (y no un MRUA[6]).

2. Consideramos ahora $a \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y la curva

   $$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & a + t^2 v \end{array}$$

   Tenemos que $tr(\beta) = \beta(I) \subset tr(\alpha) = R_{a,v}$. Si estudiamos su velocidad tendremos

   $$\beta'(t) = 2tv$$

   y estaremos ante un Movimiento Rectilíneo (no uniforme). Estudiando su aceleración tendremos

   $$\beta''(t) = 2v$$

   Por lo que la aceleración será constante y estamos ante un MRUA. Normalmente escribiremos

   $$tr(\beta) = R_0^+(a, v)$$

Ejercicio 1.1.1. Estudiar la curva $\gamma(t) = a + t^3 v$ con $a \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Ejemplo. Supongamos que tenemos la curva

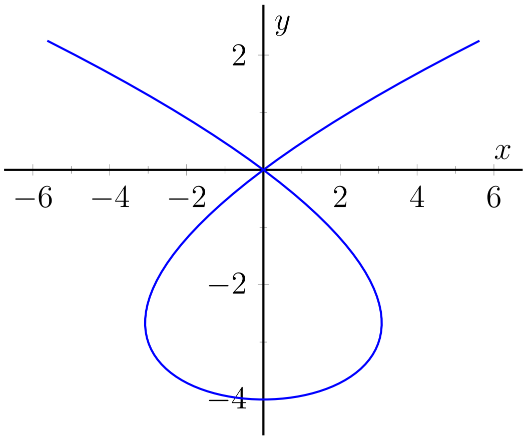
$$\begin{array}{rccc} \delta: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t^3 - 4t, t^2 - 4) \end{array}$$

[3] Se nos anima a buscar un software que nos permita pintar una curva

[4] Movimiento Rectilíneo Uniforme

[5] Todo cuerpo permanece en reposo o se mueve a velocidad constante en línea recta a menos que una fuerza externa neta actúe sobre él

[6] Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado



Este ejemplo nos permite ver que existen curvas con **autointersecciones**.

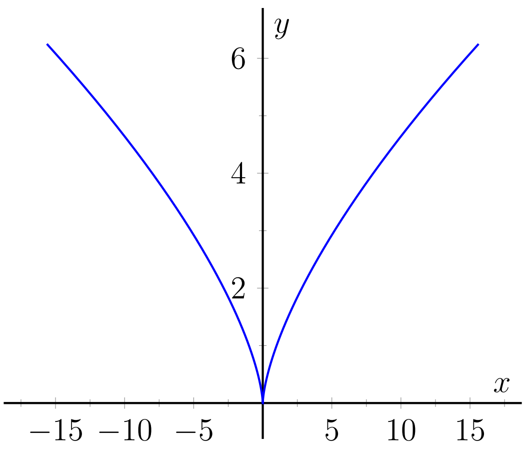
Ejemplo. Consideramos ahora la curva definida como

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t^3, t^2) \end{array}$$

Si estudiamos sus derivadas tenemos

$$\varepsilon'(t) = (3t^2, 2t)$$
$$\varepsilon''(t) = (6t, 2)$$

y obtenemos la siguiente gráfica



Este ejemplo nos demuestra que aunque ε sea diferenciable, $tr(\varepsilon)$ tiene "picos". Tenemos que $img(\varepsilon) = Gr\{y = x^{2/3}\}$, es decir, la traza de ε coincide con la gráfica de una función no diferenciable.

Ejemplo. Consideramos la siguiente curva

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & a + r(e_1 \cos(\frac{t}{r}) + e_2(\operatorname{sen}(\frac{t}{r}))) \end{array}$$

donde $r > 0$, $a \in \mathbb{R}^3$, $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que $|e_1| = |e_2| = 1$ y $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

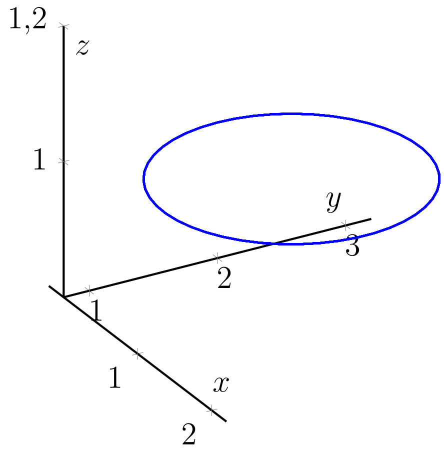
Como tenemos 2 vectores ortogonales en el espacio, estos generarán un plano, por lo que $\zeta(t) \in P = a + \langle\{e_1, e_2\}\rangle \ \forall t \in \mathbb{R}$. Por tanto

$$img(\zeta) = tr(\zeta) \subset P \Rightarrow \zeta \text{ es una curva plana}$$

Además, se verifica que

$$|\zeta(t) - a| = r \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

lo que nos dice que todos los puntos de la traza equidistan al punto a, llegando a la conclusión de que $tr(\zeta)$ es una circunferencia centrada en a. A esta curva la llamaremos la circunferencia de centro a y radio $r > 0$ en P.



Podemos ver también que esta curva no se recorre de una forma aleatoria:

$$\zeta'(t) = -e_1\left(\text{sen}\left(\frac{t}{r}\right)\right) + e_2\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right)\right) \Rightarrow \text{ no es un MRU}$$
$$\zeta''(t) \text{ no es constante} \Rightarrow \text{ no es un movimiento rectilíneo acelerado}$$

Si estudiamos un poco más esta curva veremos que la aceleración es solo centrífuga ya que $|\zeta''(t)| = 1$. Esta es la traza de un MCU[7].

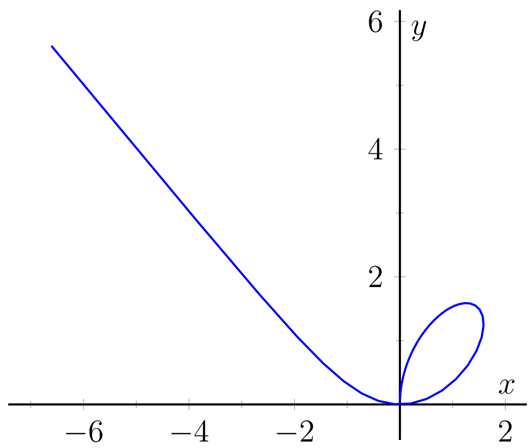
Ejemplo. Definimos la siguiente curva

$$\begin{array}{rccl} \eta: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right) \end{array}$$

donde $I =]-1, +\infty[$. La gráfica será algo como[8]

[7] Movimiento Circular Uniforme

[8] a esta curva se le conoce como Folium (Hoja) de Descartes. Se suele tomar la simetría sobre el eje $y = x$.



Tendremos que ver que η es inyectiva (o lo que es lo mismo, no tiene autointersecciones). Observamos también que $\eta'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$. Nos preguntamos si $I \cong tr(\eta)$ es un homeomorfismo y llegamos a la conclusión de que no lo es (si quitamos el punto $(0,0)$ en la $tr(\zeta)$ obtenemos una única componente conexa, ya que $\overline{(tr(\zeta) \setminus \{(0,0)\})} = tr(\zeta)$, pero al quitar cualquier punto en I obtendremos dos componentes).

Definición 1.3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, definimos la **recta tangente** a α en el instante $t \in I$ como la recta afín $\alpha(t) + \langle \alpha'(t) \rangle$ y la representamos como $R_{\alpha(t),\alpha'(t)} \equiv R_t$.

Observación. Si $\alpha'(t) = 0$, entonces la recta tangente será $\alpha(t) + \langle 0 \rangle = \alpha(t)$ que no será una recta, sino un punto. Por tanto, en los puntos $t \in I$ con $\alpha'(t) = 0$ no existirá recta tangente. Esto nos dará motivos para intentar evitar esta situación.

Definición 1.4. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva. Los puntos $\alpha(t) \in tr(\alpha)$ tales que $\alpha'(t) \neq 0$ se llaman **regulares**. A los puntos que no verifican esta condición los llamaremos **singulares**.

La curva α se dice **regular** si $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$, es decir, si todos los puntos $t \in I$ son regulares.

Ejemplo.

1. La gráfica de una función real de variable real es la traza de una curva (parametrizada diferenciable[9]).

   Normalmente, en bachiller, la solución de un ejercicio de análisis de una función $f : I \to \mathbb{R}$ venía dada al estudiar la gráfica de f dada por

   $$Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \ y = f(x)\}$$

   Tenemos que definir de una curva $\alpha_f : I \to \mathbb{R}^2$ tal que

   $$tr(\alpha_f) = \alpha_f(I) \overset{queremos}{\equiv} Gr(f)$$

[9] a veces lo notaremos como p.df

Para ello definimos $\alpha_f(t) = (t, f(t))$. Esto nos dice que todas las funciones que hemos estudiado en análisis a lo largo de nuestra vida describen curvas p.df. Sin embargo, esto no es al revés, es decir, existen curvas cuya traza no es gráfica de ninguna función. Por ejemplo, la ya estudiada

$$\delta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

ya que su proyección sobre cualquier recta que pase por el origen no es inyectiva: existen valores de x a los que les corresponde más de una imagen en y.

2. Definimos[10] la curva $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\theta(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Haremos una distinción de casos según los valores de a y b.

•) Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y la curva queda como

$$\theta(t) = (0, 0, t)$$

que se corresponde al eje Z por lo que $tr(\theta)$.

•) Si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y como se anula la tercera componente tendremos que $tr(\theta) \subset P(\{z = 0\})$. Además tendremos que la curva es una circunferencia centrada en $(0, 0, 0)$ y de radio $|a|$, lo que se ve fácilmente al sustituir en la definición de la curva:

$$\theta(t) = \left(a\cos\left(\frac{t}{|a|}\right), a\operatorname{sen}\left(\frac{t}{|a|}\right), 0 \right)$$

•) Si $b \neq 0$. Tenemos que $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$ lo que nos dice que $\forall t \in \mathbb{R}$, se tiene que

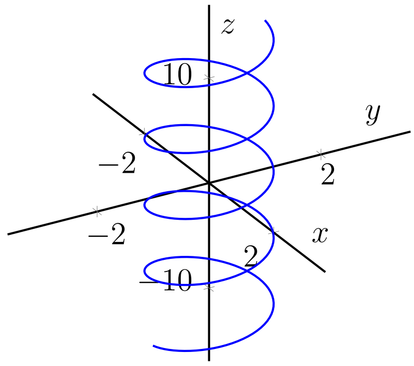
$$\theta(t) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\}$$

Es fácil ver que esto es un cilindro circular recto de radio $|a|$. Estudiando la curva θ veremos que es una **hélice circular recta** con eje el eje Z y de radio $|a|$.

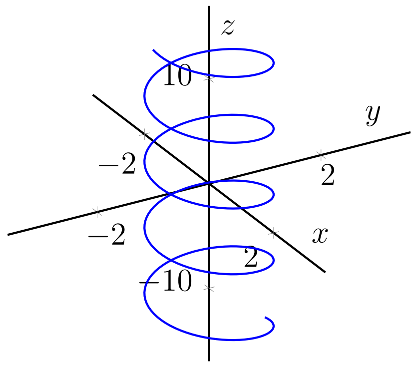
Estudiamos dos casos dentro de este:

- Si $b > 0$ la hélice gira hacia la izquierda (sentido contrario a las agujas del reloj) y diremos que es **levógira**.

[10]Se pronuncia con la z española (no es tita de nadie y no tiene connotaciones sexuales)



- Si $b < 0$ la hélice gira hacia la derecha (sentido horario) y diremos que es **dextrógira**.



Definición 1.5. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, definimos la **longitud de** α **entre** a **y** b **correspondiente a la partición** $P = \{t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_a^b(\alpha, P) &= |\alpha(t_1) - \alpha(t_0)| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| + ... + |\alpha(t_n) - \alpha(t_{n-1})| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(i+1) - \alpha(i)| \end{aligned}$$

Observación. Podemos aplicar ahora la desigualdad triangular n veces a la expresión anterior y obtenemos

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(i+1) - \alpha(i)| \geqslant |\alpha(t_n) - \alpha(t_0)| = |\alpha(b) - \alpha(a)|$$

La igualdad se dará cuando todos los puntos de P estén alineados. Además, esta propiedad nos dice que la longitud de una curva está acotada inferiormente, independientemente de la partición P que tomemos, por la distancia entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$, es decir, el camino más corto entre dos puntos es el segmento que los une.

Nos interesará ver ahora si esta longitud está acotada superiormente. Para ello consideramos la misma definición anterior, pero escrita en forma integral:

$$\begin{aligned} L_a^b(\alpha,P) &= \left|\int_{t_0}^{t_1}\alpha'(t)dt\right| + \left|\int_{t_1}^{t_2}\alpha'(t)dt\right| + ... + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_n}\alpha'(t)dt\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t_1}|\alpha'(t)|dt + \int_{t_1}^{t_2}|\alpha'(t)|dt + ... + \int_{t_{n-1}}^{t_n}|\alpha'(t)|dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_n}|\alpha'(t)|dt = \int_a^b|\alpha'(t)|dt \end{aligned}$$

y ya tenemos una cota superior a esta longitud. Tenemos entonces, para toda partición P de $[a,b]$:

$$|\alpha(b)-\alpha(a)| \leqslant L_a^b(\alpha,P) \leqslant \int_a^b |\alpha'(t)|dt \overset{def}{=} L_a^b(\alpha)$$

Si consideramos ahora las componentes de α podemos definir la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f: & [a,b]\times[a,b]\times[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\delta,\beta,\gamma) & \longmapsto & \sqrt{x'(\delta)^2+y'(\beta)^2+z'(\gamma)^2} \end{array}$$

que será continua (por ser α diferenciable) y está definida en un compacto, lo que nos dice que f es uniformemente continua, es decir, dado $\varepsilon > 0$, entonces $\exists\delta > 0$ tal que si

$$\begin{array}{l} t_1,t_2,t_3 \\ t_1',t_2',t_3' \end{array} \in [a,b] \text{ con } \begin{array}{l} |t_1-t_1'|<\delta \\ |t_2-t_2'|<\delta \\ |t_3-t_3'|<\delta \end{array} \Rightarrow |f(t_1,t_2,t_3)-f(t_1',t_2',t_3')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Sea P una partición de $[a,b]$ con[11] $|P|<\delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|L_a^b(\alpha,P) - \int_a^b|\alpha'(t)|dt\right| &= \left|\sum_{i=1}^n\left(|\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})| - \int_{t_{i-1}}^{t_i}|\alpha'(t)|dt\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\left||\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})| - \int_{t_{i-1}}^{t_i}|\alpha'(t)|dt\right| \overset{(*)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n ||f(\delta_i,\beta_i,\gamma_i)|(t_i-t_{i-1}) - f(\varepsilon_i,\varepsilon_i,\varepsilon_i)(t_i-t_{i-1})| = \\ &= \sum_{i=1}^n |f(\delta_i,\beta_i,\gamma_i)-f(\varepsilon_i,\varepsilon_i,\varepsilon_i)|(t_i-t_{i-1}) < \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i-t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1}) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ hemos aplicado el Teorema de Cauchy del valor intermedio y el Teorema de Cacuhy del valor intermedio integral, donde $\delta_i,\beta_i,\gamma_i,\varepsilon_i \in [t_{i-1},t_i]$. Acabamos de probar por tanto la siguiente proposición y posteriormente la definición de longitud de un arco.

[11] es decir, la distancia entre cualesquiera dos puntos consecutivos de la partición P sea menor que δ

Proposición 1.1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, $[a,b] \subset I \subset \mathbb{R}$ y P una partición de $[a,b]$, entonces $\forall \varepsilon > 0$ se tiene que si $\exists \delta > 0$ con $|P| < \delta$, entonces se tiene que

$$\left| L_a^b(\alpha, P) - \int_a^b |\alpha'(t)|dt \right| < \varepsilon$$

O equivalentemente

$$\exists \lim_{|P| \to 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt$$

Definición 1.6 (Longitud de arco)**.** Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, $[a,b] \subset I \subset \mathbb{R}$, definimos la **longitud de** α **entre** a **y** b ("entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$") como

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt$$

Ejercicio 1.1.2. Probar que $L_a^b(\alpha) = \sup_P L_a^b(\alpha, P)$.

Ejemplo.

1. Tomamos $p \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ y consideramos la curva $\alpha(t) = p + tv$ con $t \in \mathbb{R}$. Tomamos $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y tenemos

   $$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = \int_a^b |v|dt = |v| \int_a^b 1dt = |v|(b-a)$$

   Por tanto podemos concluir

   •) Si $v = 0 \Rightarrow L_a^b(\alpha) = 0$.

   •) Si $v \neq 0$ entonces recuperamos la fórmula del MRU, $e = |v|t$ (pensando en que $b - a$ es una diferencia de tiempos, y por tanto, un incremento temporal).

2. Consideramos ahora $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva tal que $tr(\beta) = C(a,r)$ con $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$. La definimos en el plano $P(\{z = 0\})$ de la siguiente forma

   $$\beta(t) = (a_1, a_2) + r\left(\cos\left(\frac{t}{r}\right), \sin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$$

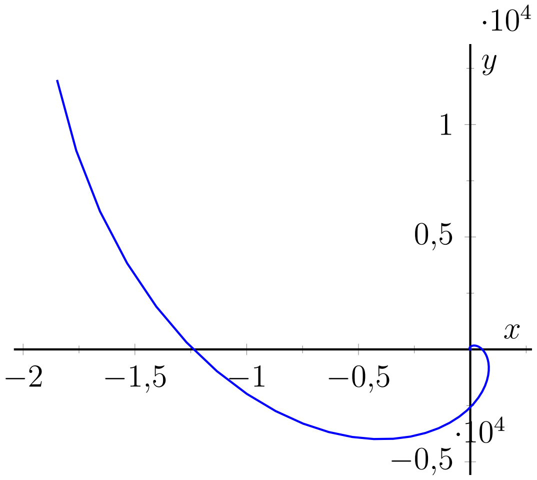
   Consideramos ahora el hecho de "dar una vuelta", que observamos que ocurre en el intervalo $[0, 2\pi r]$, es decir, la longitud de la circunferencia será

   $$L_0^{2\pi r} = \int_0^{2\pi r} |\beta'(t)|dt = \int_0^{2\pi r} 1dt = 2\pi r$$

3. Calculemos la longitud de la siguiente curva

   $$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)) = e^{-t}(\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

   en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$. En primer lugar nos haremos una idea de la forma de la curva gráficamente:



A esta curva la llamamos **espiral logarítmica**. Pasamos al cálculo:

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$$\gamma'(t) = e^{-t}(\cos(t), \sin(t)) + e^{-t}(-\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\gamma'(t)|^2 = e^{-2t} + e^{-2t} = 2e^{-2t}$$

Podemos ver en nuestro estudio que γ es regular. Podemos concluir también que

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{2}e^{-t} \Rightarrow L_a^b(\gamma) = \int_a^b \sqrt{2}e^{-t} dt = \sqrt{2}[-e^{-t}]_a^b = \sqrt{2}(-e^{-b} + e^{-a})$$

Además, en este caso concreto podemos estudiar una propiedad interesante:

$$\lim_{b \to \infty} L_a^b(\gamma) = \sqrt{2}e^{-a}$$

Lo que nos dice que podríamos recorrer una distancia infinita con recursos finitos. Este ejemplo nos permite calcular la velocidad de forma muy sencilla. Lo normal es que el cálculo de la longitud sea complicado, ya que las primitivas a calcular no serán tan sencillas.

2. Curvas a partir de curvas

En este capítulo se estudian las transformaciones que permiten obtener nuevas representaciones o formas geométricas a partir de una curva dada, analizando bajo qué condiciones se preservan propiedades fundamentales como la regularidad y la longitud.

2.1. Reparametrizaciones

Intuitivamente, una reparametrización será una variación del parámetro temporal de una curva, es decir, recorrerla a distinta velocidad sin alterar su traza, conservando así su geometría.

Definición 2.1. Consideramos una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y una aplicación $h : J \to I$. Podemos definir entonces una nueva curva $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ como $\beta = \alpha \circ h$. Estaríamos en la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\beta=\alpha\circ h"'] & I \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

A esta nueva curva β la llamaremos **reparametrización** de α por medio de h. Además, aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = h'(t)\alpha'(h(t)) \quad \forall t \in J$$

2.1.1. Conservación de la regularidad

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es regular y queremos que β también lo sea, tendremos que imponer $h'(t) \neq 0 \ \forall t \in J$. Tenemos entonces dos posibles situaciones:

- •) Si $h'(t) > 0 \quad \forall t \in J$, entonces $h : J \to I$ es un difeomorfismo creciente (preserva la orientación)
- •) Si $h'(t) < 0 \quad \forall t \in J$, entonces $h : J \to I$ es un difeomorfismo decreciente (invierte la orientación)

Observación. Para que la traza sea idéntica, es decir, $tr(\beta) = tr(\alpha)$ necesitaremos imponer que h sea sobreyectiva, ya que en dicho caso tendremos que $h(J) = I$ y entonces

$$tr(\beta) = \beta(J) = (\alpha \circ h(J)) = \alpha(h(J)) = \alpha(I) = tr(\alpha)$$

2.1.2. Invarianza de la longitud

Queremos ver ahora que la longitud de arco es una propiedad intrínseca de la curva y no depende de cómo se recorra. Para verlo calculamos la longitud de la curva en un compacto $[a,b] \subset I$.

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b |\beta'(t)|dt = \int_a^b |h'(t)||\alpha'(h(t))|dt \overset{(*)}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} |\alpha'(u)|du = L_{h(a)}^{h(b)}(\alpha)$$

donde en $(*)$ hemos aplicado el Teorema de Cambio de Variable ($u = h(t)$). Podemos concluir finalmente que la longitud es invariante por reparametrizaciones.

2.2. Deformaciones

A diferencia de la reparametrización, una deformación aplica una transformación geométrica a la curva, modificando posiblemente su traza.

Definición 2.2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación (normalmente un difeomorfismo), definimos la curva $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ como $\beta = \phi \circ \alpha$. Estaremos en la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\beta=\phi\circ\alpha"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

A esta curva β la llamaremos una **deformación** de α por medio de ϕ. Su vector tangente viene dado por la aplicación lineal asociada (el diferencial):

$$\beta'(t) = (\phi \circ \alpha)'(t) = d\phi_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$$

2.2.1. Condición de regularidad

Si queremos que la deformación de una curva regular siga siendo regular, necesitamos asegurar que el vector tangente no se anule. Si α es regular ($\alpha'(t) \neq 0$), entonces $\beta'(t)$ será distinto de cero si y solo si el diferencial $d\phi_{\alpha(t)}$ es inyectivo para todo $t \in I$, es decir, que su núcleo sea trivial. Por tanto, β será regular si y solo si

$$\det(J\phi(\alpha(t))) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

Podemos concluir entonces que si queremos que la regularidad de las curvas se conserve por deformaciones debemos usar difeomorfismos locales. Por ello, ϕ siempre será un difeomorfismo (tal y como se indica en la definición).

Observación. Hay difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que conservan la "geometría". Estos son los ya estudiados movimientos rígidos. Estos serán difeomorfismos M de la forma

$$\begin{aligned} M :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto Mx = Ax + b \end{aligned}$$

donde[1] $A \in O(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$.

Si tomamos $\phi = M$ movimiento rígido, entonces al estudiar la traza de la curva deformada tenemos:

$$tr(\beta) = M(tr(\alpha)) \equiv tr(\alpha)$$

es decir, la traza no es igual pero es equivalente (conserva la "geometría"). Estudiando la longitud tenemos:

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b |\beta'(t)|dt \overset{(*)}{=} \int_a^b |A\alpha'(t)|dt = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = L_a^b(\alpha)$$

donde en $(*)$ hemos aplicado que $\beta'(t) = A\alpha'(t)$. Tenemos entonces que los movimientos rígidos conservan la longitud.

2.3. Longitud orientada de una curva

Definición 2.3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva, $a \in I$. Definimos[2] la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccl} S_a : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & S_a(t) = \int_a^t |\alpha'(u)|du \end{array}$$

Si estudiamos esta aplicación tendremos

$$S_a(t) = \begin{cases} L_a^t(\alpha) & \text{si} \quad a \leqslant t \\ \\ -L_t^a(\alpha) & \text{si} \quad t \leqslant a \end{cases}$$

A esta aplicación la llamaremos la **longitud orientada** de α respecto del instante $a \in I$.

Propiedades.

- •) S_a es derivable y $S_a'(t) = |\alpha'(t)|$.
- •) Si α es regular, de la propiedad anterior podemos concluir que
  1. $S_a : I \to S_a(I) = J$ es un difeomorfismo entre intervalos abiertos.
  2. Sea $h = (S_a)^{-1} : J \to I$, teníamos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ podemos reparametrizar α[3]. Definimos así $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^3$ que es la reparametrización de α por medio del difeomorfismo $h = (S_a)^{-1}$. Sabemos además por la regla de la cadena que para todo $s \in J$ se tiene que

$$S_a(h(s)) = s \Rightarrow 1 = h'(s)S_a'(h(s)) \Rightarrow 1 = h'(s)|\alpha(h(s))|$$

[1] $O(3)$ es el conjunto de matrices ortogonales de dimensión 3, es decir, matrices cuya inversa coincide con su transpuesta.

[2] La S hace referencia a espacio, *space* en inglés.

[3] estamos usando la propia curva para reparametrizar la curva

De donde concluimos que

$$h'(s) = \frac{1}{|\alpha'(h(s))|}$$

De esta forma, para $s \in J$ tenemos que

$$\beta'(s) = (\alpha \circ h)'(s) = h'(s)\alpha'(h(s)) = \frac{\alpha'(h(s))}{|\alpha'(h(s))|}$$

Concluimos que

$$|\beta'(s)| = 1 \quad \forall s \in J$$

Por tanto toda curva regular admite una reparametrización con celeridad constantemente 1. Estas curvas verifican

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b 1dt = b - a$$

A este tipo de curvas se les llama **curvas parametrizadas por el arco**[4].

Ejercicio 2.3.1. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva p.p.a., ¿cuántas reparametrizaciones por el arco admite?

Ejercicio 2.3.2. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva regular, llamamos **curva normal** a la curva α en el instante t a la recta que pasa por $\alpha(t)$ y es perpendicular a la recta tangente en este instante. Se pide estudiar las rectas normales de una recta y de una circunferencia. ¿Hay alguna otra curva que satisfaga las mismas propiedades que estas curvas?

Tener todas las rectas normales paralelas es equivalente a decir que todas las rectas tangentes son paralelas. Sea $s \in I$, su recta tangente será

$$\alpha(s) + \langle \alpha'(s) \rangle$$

Sabemos además que

$$\alpha'(s) = \lambda(s)v \quad v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \lambda(s) \neq 0 \ \ \forall s \in I$$

Para ver que $\lambda(s)$ es diferenciable, como $\alpha'(s)$ lo es tendremos que $\lambda(s)v$ también lo será. Podemos considerar ahora

$$\langle \lambda(s)v, v \rangle$$

que es diferenciable y además $\langle \lambda(s)v, v \rangle = \lambda(s)|v^2|$. Podemos dividir ahora entre $|v^2|$ y obtendremos que $\lambda(s)$ es diferenciable. Al ser en particular continua tendremos que, o bien $\lambda(s) > 0$ o bien $\lambda(s) < 0$ para todo $s \in I$. Fijamos $s_0 \in I$ y tenemos

$$\int_{s_0}^{s} \alpha'(u)du = \left(\int_{s_0}^{s} \lambda(u)du \right) v$$

[4] lo notaremos por p.p.a. (no es el partido popular andaluz ni nada de eso).

Si notamos por $f(s) = \int_{s_0}^{s} \lambda(u)du$ y aplicamos el teorema fundamental del cálculo en el término izquierdo obtenemos

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = f(s)v$$

De forma que despejando obtenemos

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + f(s)v \in R_{\alpha(s_0),v}$$

Por tanto, $tr(\alpha)$ está contenida en una recta. Obtenemos finalmente que $tr(\alpha)$ es un segmento de recta.

Nos planteamos ahora el caso de que todas las rectas normales pasen por un mismo punto. La recta normal en un punto $t \in I$ será aquella recta que pasa por $\alpha(t)$ y con dirección perpendicular a $\alpha'(t)$, o equivalentemente con dirección $J\alpha'(t)$. De esta forma, la recta normal en t será

$$\alpha(t) + \lambda J\alpha'(t) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Tenemos entonces que existe un punto $c \in \mathbb{R}^2$ tal que c pertenece a todas las rectas normales. De esta forma tenemos

$$\forall t \in I \ \ \exists\lambda(t) : \alpha(t) + \lambda(t)J\alpha'(t) = c \quad \lambda : I \to \mathbb{R}$$

Con un argumento análogo al anterior, para ver que $\lambda(t)$ es diferenciable consideramos

$$\langle \lambda(t)J\alpha'(t), J\alpha'(t)\rangle = \lambda(t)|\alpha'(t)|^2$$

Dividimos ahora entre $|\alpha'(t)|^2$ y llegamos a que λ es diferenciable. Además

$$\alpha(t) - c = -\lambda(t)J\alpha'(t)$$

Multiplicamos escalarmente por $\alpha'(t)$ y obtenemos

$$\langle \alpha(t) - c, \alpha'(t)\rangle = 0 \quad \forall t \in I$$

Además, esto es igual a $\frac{1}{2}(|\alpha(t) - c|^2)' = 0$. Esto nos dice que

$$|\alpha(t) - c|^2 = r > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esto nos lleva a que $\alpha(t) \in C(c, r)$ por lo que $tr(\alpha) \subset C(c, r)$ y tendremos que $tr(\alpha)$ es un arco de circunferencia.

2.4. Teoría local de curvas planas. Diedro de Frenet. Curvatura

Notación. A partir de ahora todas las curvas $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ serán planas y regulares excepto que se especifique lo contrario. Podemos considerarla por tanto p.p.a. ya que lo que nos interesa es la forma de la traza y nos va a ayudar conocer la celeridad de la curva. Representamos el vector tangente $\alpha'(s)$ de α en el instante $s \in I$ por

$$\alpha'(s) = T(s) \in \mathbb{R}^2$$

y por las curvas que estamos considerando tenemos que

$$|T(s)| = 1 \quad \forall s \in I$$

Definición 2.4. Definimos el **vector normal** de α en $s \in I$ como

$$N(s) = JT(s)$$

donde J está dada por

$$\begin{array}{rccl} J: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & J(x,y) = (-y,x) \end{array}$$

es decir, J es un giro de 90° en sentido antihorario.

Propiedades.

1. $|N(s)| = |JT(s)| = |T(s)| = 1$ para todo $s \in I$.

2. $\langle T(s), N(s)\rangle = \langle T(s), JT(s)\rangle = 0$.

3. Dado $s \in I$ podemos considerar $\{T(s), N(s)\}$ que será una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ positivamente orientada que depende diferencialmente de s. A esta base la llamaremos **diedro de Frenet-(Serret)** de α en el instante $s \in I$.

4. Si estudiamos el cambio del diedro de Frenet a lo largo de la curva tendremos que estudiar $T'(s)$ y $S'(s)$. Tenemos que

$$\langle T(s), T(s)\rangle = 1 \quad \forall s \in I$$
$$2\langle T'(s), T(s)\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

Tenemos entonces que, como $T'(s) \in \mathbb{R}^2$ necesariamente $T'(s) = \lambda_s T(s) + \mu_s N(s)$ y del producto escalar anterior concluimos que $\lambda_s = 0$. Por tanto

$$T'(s) = \mu_s N(s)$$

A partir de ahora notaremos a este μ_s como $k(s) \in \mathbb{R}$ y lo llamaremos la **curvatura** de α en $s \in I$. Dicha aplicación verifica

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

Análogamente tenemos

$$\langle N(s), N(s)\rangle = 1 \quad \forall s \in I$$
$$2\langle N'(s), N(s)\rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

Lo que, con el razonamiento anterior nos lleva a que $N'(s) = \nu_s T(s)$. Como tenemos que $\langle T(s), N(s)\rangle = 0$ podemos derivar y obtenemos

$$\langle T'(s), N(s)\rangle + \langle T(s), N'(s)\rangle = 0 \iff$$
$$\iff k(s)\langle N(s), N(s)\rangle + \nu_s\langle T(s), T(s)\rangle = k(s) + \nu_s = 0$$

de donde $\nu_s = -k(s)$. Concluimos finalmente que

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) \end{cases}$$

A estas expresiones las llamaremos **ecuaciones de Frenet**.

Ejemplo.

1. Consideramos la curva dada por

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & p + sv \end{array}$$

con $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$ y $|v| = 1$. De esta forma tendremos que

$$T(s) = v$$
$$T'(s) = 0$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. De las expresiones anteriores deducimos que

$$k(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

por lo que una recta no tendrá curvatura (como podríamos esperar).

2. Estudiamos ahora el caso de la curva definida como

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & (a_1 + r\cos(\frac{s}{r}), a_2 + r\sin(\frac{s}{r})) \end{array}$$

Al derivar esta curva obtenemos

$$\beta'(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Estudiamos ahora el vector tangente y normal obteniendo

$$\begin{cases} T_\beta(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \\ \\ N_\beta(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right) \end{cases}$$

Al derivar el vector tangente obtenemos

$$T'_\beta(s) = \frac{1}{r}\left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

de donde $k(s) = \frac{1}{r}$, es decir, la curvatura a lo largo de una circunferencia es constante y depende del radio de la misma.

Ejercicio 2.4.1. Estudiar las curvas de $\mathbb{R}^2$ p.p.a. con curvatura constante.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y consideramos $k(s) = k_0$ para todo $s \in I$. Haremos una distinción de casos:

- **•)** Si $k_0 = 0$ para todo $s \in I$, entonces de las ecuaciones de Frenet deducimos que

$$T'(s) = k(s)N(s) = k_0 N(s) = 0 \Rightarrow \alpha''(s) = 0 \quad \forall s \in I$$

Como la aceleración es nula, necesariamente la velocidad es constante por lo que

$$\alpha'(s) = v \quad \forall s \in I, \quad v \in \mathbb{R}^2 \quad |v| = 1$$

Fijando $s_0 \in I$ podemos integrar obteniendo

$$\int_{s_0}^{s} \alpha'(u)du = \left(\int_{s_0}^{s} du\right) v$$

De donde, aplicando la regla de Barrow y el TFC

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (s - s_0)v \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)v$$

y de nuevo α está dentro de una recta, y por tanto será un segmento de recta p.p.a.

•) Si $k_0 \neq 0$ para todo $s \in I$, puedo definir la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & \alpha(s) + \frac{1}{k_0}N(s) \end{array}$$

que es diferenciable. Derivando y aplicando las ecuaciones de Frenet obtenemos

$$f'(s) = T(s) + \frac{1}{k_0}(-k_0 T(s)) = 0$$

Por tanto tenemos que

$$\alpha(s) + \frac{1}{k_0}N(s) = c \in \mathbb{R}^2$$

De esta forma

$$\alpha(s) - c = -\frac{1}{k_0}N(s) \Rightarrow |\alpha(s) - c|^2 = \frac{1}{k_0^2}$$

Lo que nos dice que $tr(\alpha) \subset C(c, \frac{1}{|k_0|})$.

Observación. Del ejercicio anterior se puede concluir que las únicas curvas p.p.a. con curvatura constante son los arcos de recta y de circunferencia.

Ejercicio 2.4.2. Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva plana regular. Tomamos una reparametrización de α por el arco. Fijamos $a \in I$ y tenemos

$$J \xrightarrow{S_a^{-1}} I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^2$$

Podemos considerar entonces $\beta = \alpha \circ S_a^{-1}$ una p.p.a. (creciente). Definimos la curvatura de α en un instante $t \in I$ como

$$k_\alpha(t) = k_{\alpha \circ S_a^{-1}}(S_a(t))$$

Demostrar que esta definición no depende del punto $a \in I$ elegido para la reparametrización.

De la definición de β tenemos que $\beta \circ S_a(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in I$. Derivando con la regla de la cadena obtenemos

$$S_a'(t)T_\beta(S_a(t)) = \alpha'(t)$$

Aplicando J el giro de 90° en sentido antiohorario tenemos

$$S_a'(t)N_\beta(S_a(t)) = J\alpha'(t)$$

Derivamos la expresión previa a aplicar J aplicando la regla de Leibnitz y la regla de la cadena

$$S_a''(t)T_\beta(S_a(t)) + S_a'(t)^2 k_\beta(S_a(t))N_\beta(S_a(t)) = \alpha''(t)$$

Multiplicamos ahora escalarmente estas dos últimas ecuaciones lo que nos dice que

$$\langle J\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = S_a'(t)^3 k_\beta(S_a(t)) = |\alpha'(t)|^3 k_\alpha(t)$$

Si expresamos $\alpha'(t) = (a_1, a_2)$ y $\alpha''(t) = (b_1, b_2)$ tenemos que

$$\langle J\alpha'(t), \alpha''(t)\rangle = \langle(-a_2, a_1), (b_1, b_2)\rangle = -a_2b_1 + a_1b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = det(\alpha'(t), \alpha''(t))$$

Por lo que podemos despejar la expresión anterior concluyendo que

$$k_\alpha(t) = \frac{det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}$$

Nos preguntamos ahora qué hubiese ocurrido si hubiésemos tomado una reparametrización decreciente. Para ello consideramos $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}$ regular y $\beta : (-a, a) \to \mathbb{R}$ donde $\beta(t) = \alpha(-t)$. En este caso tendremos

$$\beta'(t) = -\alpha'(-t)$$
$$\beta''(t) = \alpha''(-t)$$

Por lo que con el razonamiento anterior llegamos a que

$$k_\beta(t) = \frac{det(\beta'(t), \beta''(t))}{|\beta'(t)|^3} = \frac{-det(\alpha'(-t), \alpha''(-t))}{|\alpha'(-t)|^3} = -k_\alpha(-t)$$

Por lo que podemos concluir que la curvatura cambia de signo bajo reparametrizaciones decrecientes.

Ejercicio 2.4.3. Calcular la curvatura de la espiral logarítmica.

Ejercicio 2.4.4. Estudiar longitud y curvatura para las gráficas de funciones derivables $f : I \to \mathbb{R}$.

Hay una curva parametrizada correspondiente a f, α_f tal que $tr(\alpha_f) = Gr(f)$. Recordamos que α_f está definida como

$$\begin{array}{rccl} \alpha_f : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \alpha_f(t) = (t, f(t)) \end{array}$$

Si estudiamos el vector tangente asociado a esta curva obtenemos

$$\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in I$$

por lo que estas curvas son siempre regulares. Podemos por tanto calcular la longitud en un compacto $[a, b] \subset I$.

$$L_a^b(\alpha_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$$

Queremos ahora calcular la curvatura. Para ello tenemos que

$$\alpha_f''(t) = (0, f''(t))$$

Según la expresión obtenida de un ejercicio previo tenemos que

$$k_{\alpha_f}(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f'(t) \\ 0 & f''(t) \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^3} = \frac{f''(t)}{\sqrt{1 + f'(t)^2}^3}$$